



# **Calcul de champs électromagnétiques ELF dans le corps humain par la méthode des Éléments Finis**

*N. Burais, J. Dardenne, O. Fabregues, L. Nicolas, R. Perrussel,  
R. Scorretti, N. Siauve, D. Voyer*



# Dosimétrie numérique des champs EMF

---

**Objectif : maîtriser les champs électromagnétiques dans le corps humain**

## **Applications :**

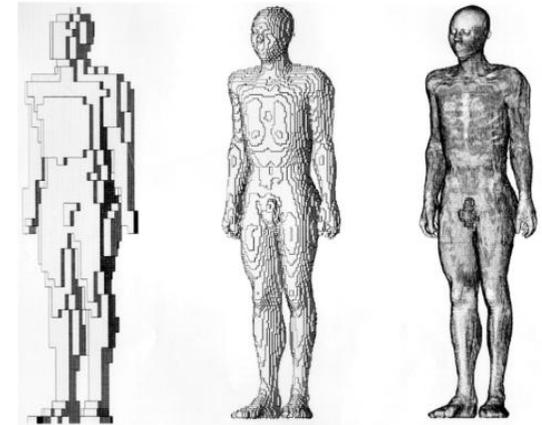
- Réglementation, radioprotection
- Applications médicales (électrochemiothérapie, traitement par PEMf ...)

## **Difficultés :**

- *Incertitudes (propriétés électriques des tissus), variabilité (morphologie)*
- *Segmentation et génération de maillage*
- Expérimentation, validation des calculs
- Systèmes de grande taille

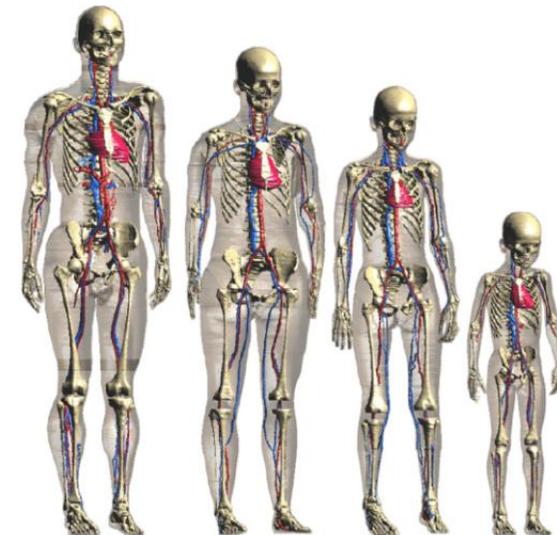
## Situations d'exposition :

- Basse fréquence
  - champ magnétique
  - champ électrique
- Haute fréquence



## Historique et état de l'art :

- 1980 : premières études
- 1994 : le *Visible Human Project*
- 1997 – 2002 : beaucoup d'études par Différences Finies
- 2008 – 2010 : nouveaux fantômes de calcul

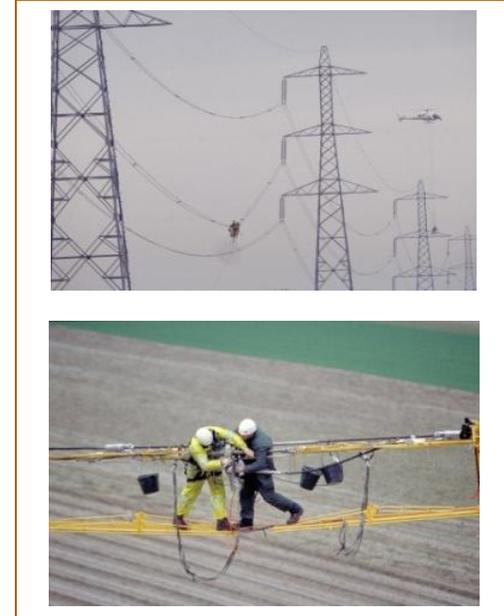


## Hypothèses :

- Courants de déplacement négligeables dans les tissus
- Réaction d'induit du corps négligeable

## Formulations duales :

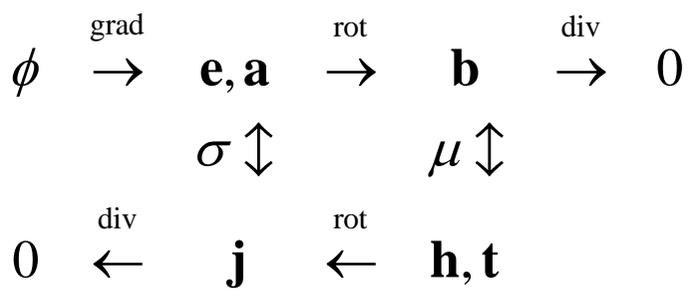
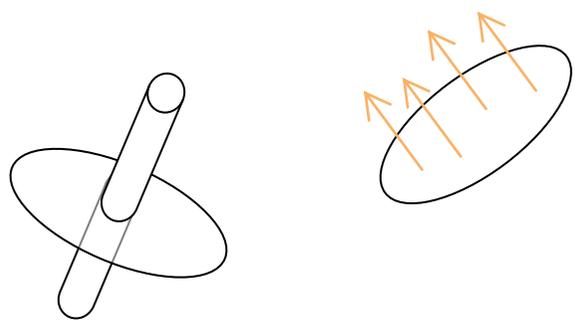
- Formulation  $\phi - \mathbf{a}$
- Formulation  $\mathbf{t} - \mathbf{b}$





# Formulations quasi-statiques (1)

## Diagramme de Tonti :



*tension*  $U = -\oint \partial \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}\mathbf{s}$

$U = RI$

*courant*  $I = \oint \mathbf{h} \cdot \mathbf{d}\mathbf{l}$

## Formulations fortes :

Formulation $\phi - \mathbf{a}$	Formulation $\mathbf{t} - \mathbf{b}$
$\mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{a} - \text{grad } \phi$ $\text{div } \mathbf{j} = 0 \Rightarrow -\text{div}(\sigma \partial_t \mathbf{a} + \text{grad } \phi) = 0$ $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} _{\partial\Omega} = 0$	$\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{t}$ $\text{rote } \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b} \Rightarrow \text{rot}\left(\frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{t}\right) = -\partial_t \mathbf{b}$ $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} _{\partial\Omega} = 0 \Leftarrow \mathbf{n} \times \mathbf{t} _{\partial\Omega} = 0$



# Formulations quasi-statiques (2)

---

## Encadrement de la coénergie :

- Nous pouvons calculer la coénergie  $\mathcal{E}^C$  avec les deux formulations :

$$\mathcal{E}^C = \int_{\Omega} \int_0^e \mathbf{j} \, d\mathbf{e} = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} & = \mathcal{E}_1^C \\ -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} & = \mathcal{E}_2^C \end{cases}$$

- Si le potentiel  $\mathbf{a}$  est exact, on démontre que :  $\boxed{\mathcal{E}_1^C \geq \mathcal{E}^C \geq \mathcal{E}_2^C}$

## Estimation de l'erreur :

- L'écart entre les deux solutions fournit localement un estimateur de l'erreur

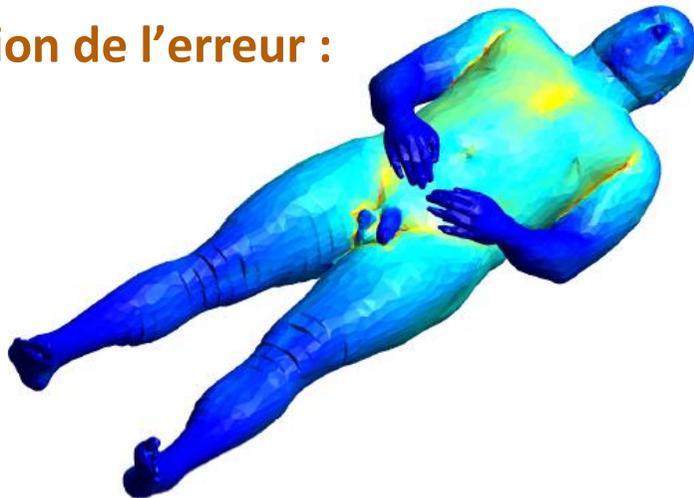
# Formulations quasi-statiques : résultats

## Encadrement de la coénergie :

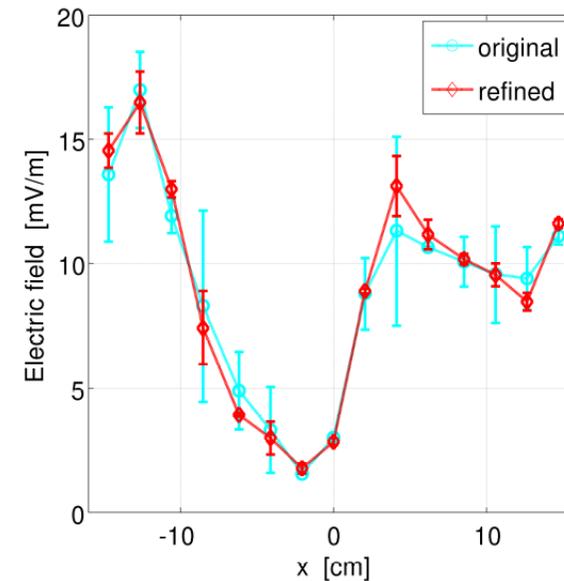
- Valeurs numériques de la coénergie  $\mathcal{E}^C$  ( $\mu\text{V}/\text{m}$ ) :

Nb. nœuds	$\mathcal{E}_1^C$	$\mathcal{E}_2^C$	$\mathcal{E}_1^C - \mathcal{E}_2^C$
250	20.1750	18.4617	<b>1.7133</b>
$3 \cdot 10^3$	20.1197	19.7165	<b>0.4032</b>
$10 \cdot 10^3$	20.1047	19.9801	<b>0.1246</b>
$75 \cdot 10^3$	20.0937	20.0771	<b>0.0166</b>

## Estimation de l'erreur :



7





# Résolution de systèmes linéaires

---

## Qu'est ce qu'un préconditionneur ?

- Le problème physique est discrétisé sous la forme d'un système linéaire :

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^* = \mathbf{f} \quad , \mathbf{u}^* = \text{solution exacte}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u} \neq \mathbf{f} \quad , \mathbf{u} = \text{solution approchée} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{f} = \text{résidu}$$

- Généralement ce système est résolu de manière itérative :
  - à chaque pas, on essaie de corriger l'erreur :  $\mathbf{A}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{r}$
  - Un préconditionneur est un algorithme qui calcule une approximation de la correction :  $\mathbf{B}\mathbf{e} \simeq \mathbf{r}$

**L'utilisation d'un préconditionneur permet d'accélérer (beaucoup) la convergence du solveur itératif.**

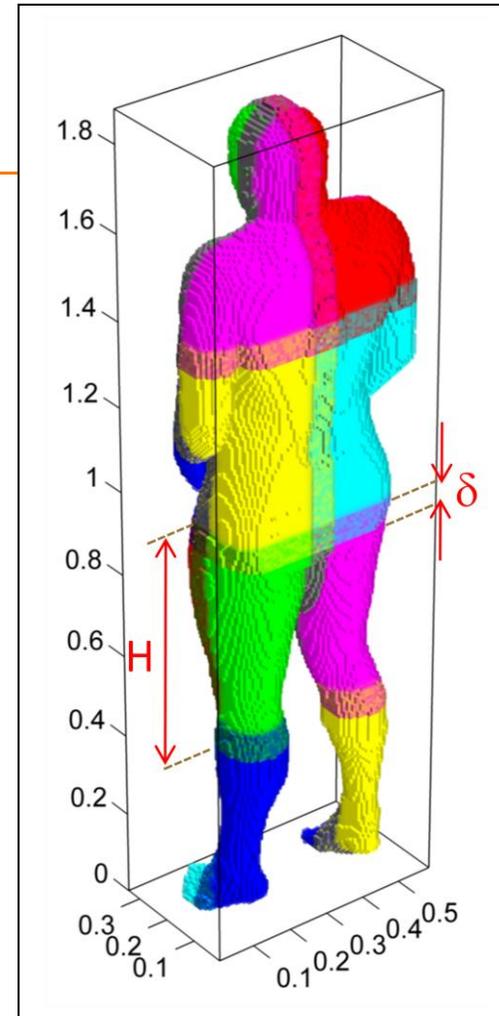
# Décomposition de domaine (1)

## Préconditionneurs de Schwarz à un niveau

- On décompose le domaine de calcul en sous-domaines partiellement superposés
- A chaque pas on calcule une correction locale (dans un sous-domaine)
- Dans les zones de superposition on impose des conditions de Dirichlet pour « coller » ensemble les sous-domaines.

## Convergence de l'algorithme :

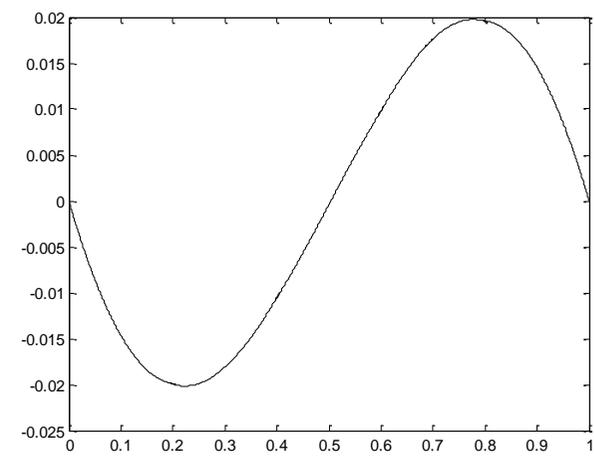
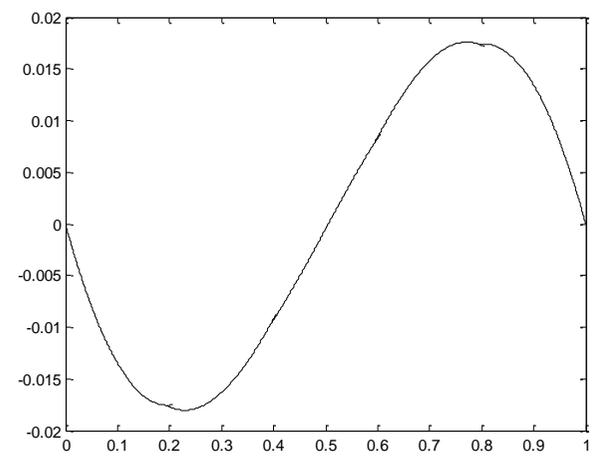
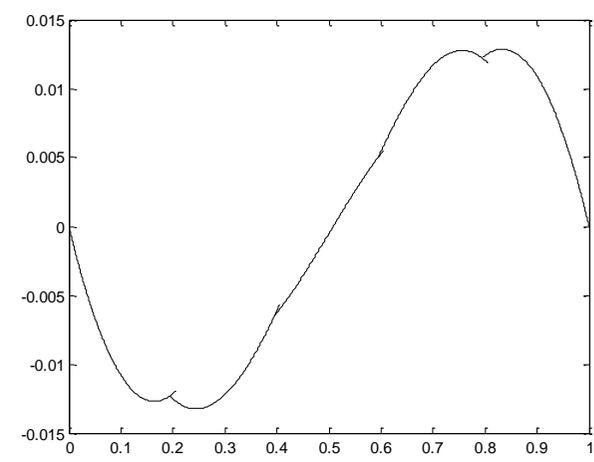
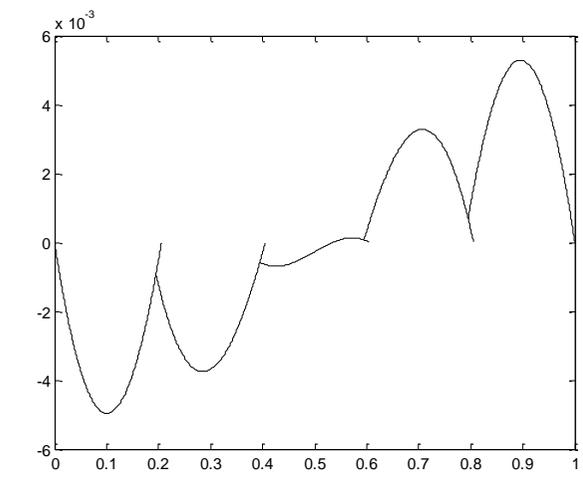
- La convergence dépend du ratio  $\delta / H$
- Les erreurs « à longue portée » sont difficilement corrigées





# Exemple en une dimension

---



# Décomposition de domaine (2)

## Préconditionneurs de Schwarz à deux niveaux

- On utilise (en plus) un maillage grossier global, qui permet de corriger les erreurs « à longue portée »
- La convergence est beaucoup moins sensible au ratio  $\delta / H$

**Algorithm 2** Two-levels additive Schwarz preconditioner

**Require:**  $A_1 \dots A_N, R_1 \dots R_N, P_1 \dots P_N, R_c, P_c, r$

    solve  $R_c A P_c \delta e_c = R_c r$

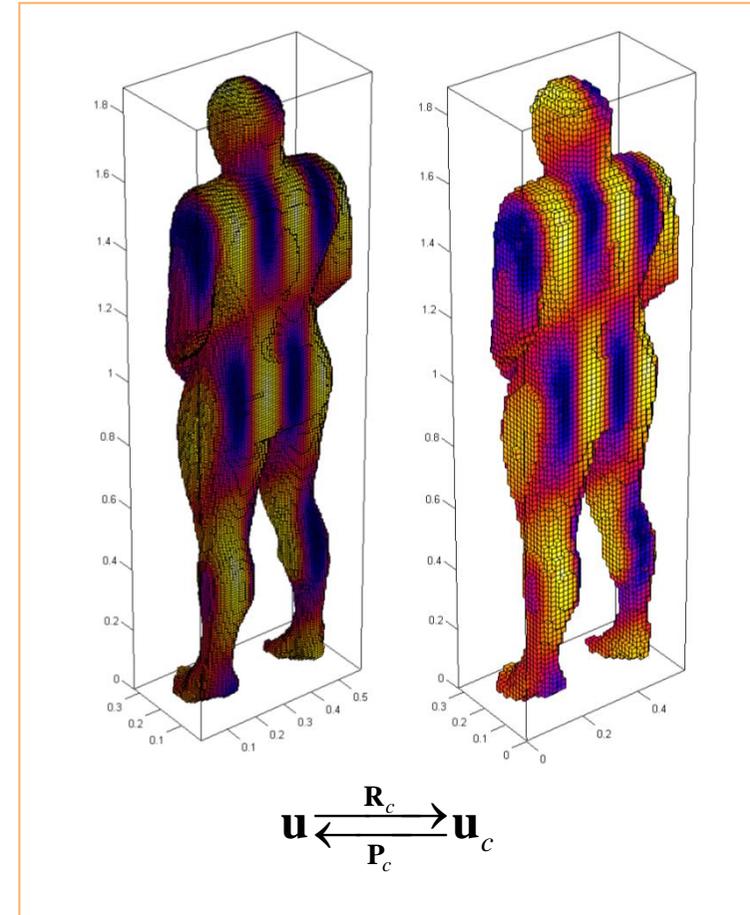
$e \leftarrow P_c \delta e_c$

**for**  $i = 1, \dots, N$  **do**

        solve  $A_i \delta e_i = R_i r$

**end for**

$e \leftarrow e + \sum_i P_i \delta e_i$

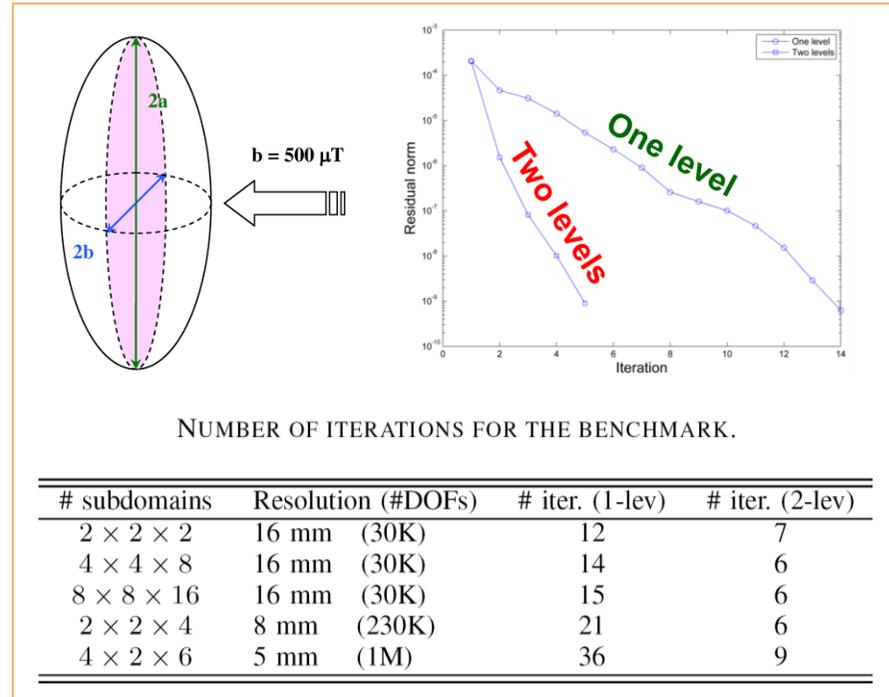


# Résultats numériques (1)

## Cas test : ellipsoïde à un champ uniforme

- Champ source :  $500\mu\text{T}$  à 50 Hz
- Paramètres variés :
  - résolution
  - partitionnement en sous-domaines

**Les résultats obtenus sont cohérents avec les prédictions théoriques**



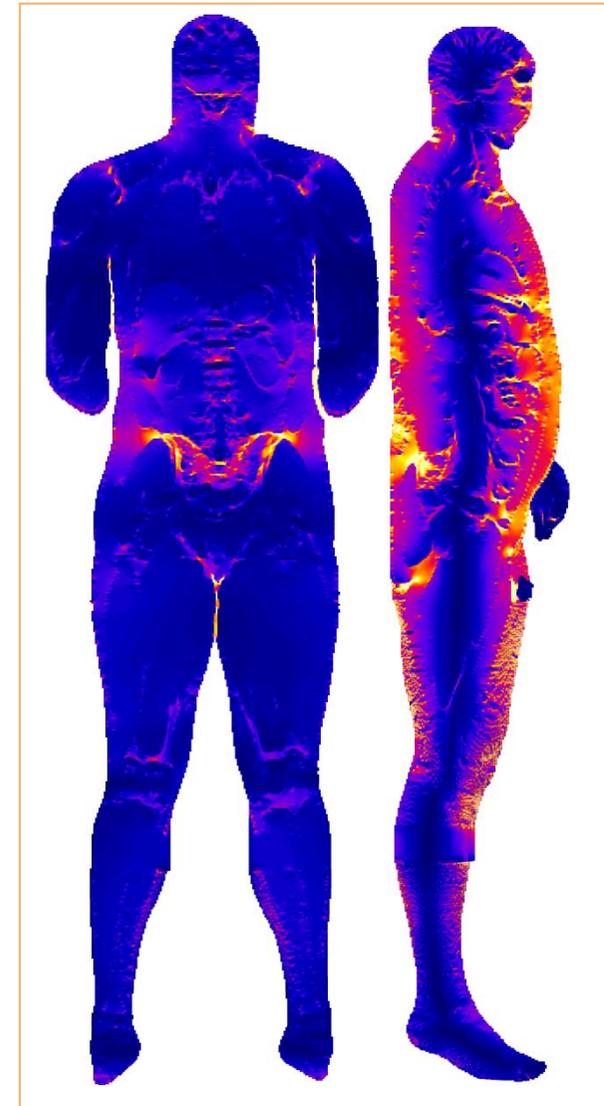
# Résultats numériques (2)

## Situation simulée :

- Fantôme de calcul : *Visible Human* (résolution = 3mm)
- Champ source : 1 mT uniforme à 50 Hz, orienté *back to front*
- Décomposition : 5×3×15 sous-domaines, 4,2M inconnues.

## Travaux pris comme référence :

- M.A. Stuchly and O.P. Gandhi, “Inter-laboratory comparison of numerical dosimetry for human exposure to 60 Hz electric and magnetic fields”, *Bioelectromagnetics*, 21(3):167–174, 2000.
- K. Caputa, P.J. Dimbylow, T.W. Dawson, and M.A. Stuchly, “Modelling fields induced in humans by 50/60 Hz magnetic fields: reliability of the results and effects of model variations”, *Physics in Medicine and Biology*, 47:1391–1398, 2002.
- L.H. Hoang, R. Scorretti, N. Burais, and D. Voyer, “Numerical Dosimetry of Induced Phenomena in the Human Body by a Three-Phase Power Line”, *IEEE Trans. Mag.*, 45(3):1666–1669, 2009.





# Décomposition de domaine (3)

## Comparaison des différentes simulations

Tout résultat confondu (différentes morphologies, résolution ...):  
D = 52%

AVERAGE ELECTRIC FIELD (mV/M) OBTAINED IN THIS WORK (LAST COLUMN) AND IN LITERATURE

Organ	UT [3] IM	UVic (3.6 mm) [3] FDTD	UVic (7.2 mm) [3] FDTD	UVic (3.6 mm) [16] SPFD <sup>(c)</sup>	AF (2 mm) [16] SPFD <sup>(c)</sup>	ZOL [17] FEM <sup>(d)</sup>	Our results FEM
Bladder	18.9	8.98	9.8	*	*	*	16.1
Brain <sup>(a)</sup>	11.5	10.6	11.5	8.82	10.3	17.5	11.2
Cerebral spinal fluid	2.8	5.1	4.3	4.28	9.15	*	4.4
Eye aqueous humor	2.1	3.5	3.6	*	*	*	1.46
Heart	12.4	13.5	17.8	14.4	16.7	15.9	11.9
Intestine (bowel)	16.5	17.5	18.2	*	*	*	15.9
Kidneys	20.2	25.2	23.3	20.6	20.4	30.8	26.7
Liver	25.8	34.4	26.4	*	*	*	35.3
Lungs <sup>(a)</sup>	28.8	20.8	22.0	18.9	20.7	21.6	17.6
Pancreas	18.0	7.9	11.4	*	*	*	6.38
Prostate <sup>(b)</sup>	21.7	17.0	17.4	*	*	*	*
Stomach <sup>(a)</sup>	11.2	10.4	13.9	*	*	*	12.8
Testis	34.7	14.8	18.7	13.0	14.2	*	3.9

Résolution:  
D = 11%

Post-processing:  
D = 10%

Résolution (maillages):  
D = 20% (15% sans ZOL)



# Conclusions et perspectives

---

## Résumé :

- L'utilisation de deux formulations duales permet d'obtenir (à défaut d'une validation expérimentale) une estimation de l'erreur de calcul.
- Les méthodes existantes permettent de résoudre les systèmes linéaires générés par les formulations utilisées.

## Problèmes ouverts :

- Génération de fantômes de calcul (segmentation, maillage, anisotropie...)
- Incertitudes sur les paramètres diélectriques.
- Comment exploiter l'énorme quantité de données générées par les simulations ?
- Aller vers l'utilisation médicale et/ou clinique.